Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Berechnen Sie die Diskriminante des Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Dabei dürfen Sie verwenden, dass der Zahlring $\mathcal{O}_K$ durch $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei K ein Körper und seien L und L' zwei (endliche) Galois-Erweiterungen von K.

(i) Begründen Sie kurz, dass auch das Kompositum LL' eine Galois-Erweiterung von K ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Gal}(LL'/K) \to \operatorname{Gal}(L/K) \times \operatorname{Gal}(L'/K),\ \sigma \mapsto (\sigma_L, \sigma_{L'})$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Zeigen Sie, dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $L \cap L' = K$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Zeigen Sie die Umkehrung von Aufgabe 3: Ist $K \subseteq E$ eine (endliche) Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(E/K) \cong H \times H'$ für zwei Gruppen H und H', so ist $E = LL'$ für zwei Galois-Erweiterungen L und L' von K mit $L \cap L' = K$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Wir wollen uns hier ein Beispiel für Bemerkung 9.3 überlegen:

Es gibt Zahlkörper ohne Ganzheitsbasis der Form $1, \beta, \ldots, \beta^{n-1}$.

Dafür betrachten wir den Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Wurzel des irreduziblen Polynomes $x^3 - x^2 - 2x - 8$ ist. Dies ist also eine kubische Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Wir setzen $\alpha' = \frac{4}{\alpha}$.

(i) Rechnen Sie nach, dass $\alpha'^3 + \alpha'^2 + 2\alpha' - 8 = 0$ ist und folgern Sie, dass α' im Zahlring $\mathcal{O}_K$ enthalten ist.

(ii) Zeigen Sie, dass α^2 und α'^2 in $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\alpha'$ enthalten sind und folgern Sie daraus, dass die abelsche Gruppe R sogar ein Unterring von $\mathcal{O}_K$ ist.

(iii) Berechnen Sie die Spuren von α und α' und nutzen Sie diese, um die Diskriminante $\operatorname{disc}(1, \alpha, \alpha')$ auszurechnen. Folgern Sie daraus, dass die Inklusion $R \hookrightarrow \mathcal{O}_K$ eine Gleichheit ist. Wir haben also schon einmal den Zahlring berechnet.

bitte wenden

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 5

(iv) Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\beta]$ für alle $\beta \in \mathcal{O}_K$ ist. Dafür schreiben wir nun erstmal $\beta = m_1 + m_2\alpha + m_3\alpha'$ für ganze Zahlen m_1, m_2 und m_3. Stellen Sie anhand von dieser Darstellung von β eine ganzzahlige Matrix M auf, mit $(1, \beta, \beta^2)^t = M(1, \alpha, \alpha')^t$.

(v) Die Theorie der Moduln über Hauptidealringen liefert, dass der Index $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\beta]]$, welcher in diesem Fall endlich ist, mit dem Betrag von $\det(M)$ übereinstimmt (so ähnlich wie in Proposition 8.12 (iii)). Zeigen Sie, dass dieser Index eine gerade Zahl ist und folgern Sie, dass $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\beta]$ ist. Um die Berechnung zu erleichtern kann es nützlich sein, sich zu überlegen, dass wir $m_1 = 0$ annehmen können.